סיכום אינפי 2 הרצאה 2

מסמך זה נועד לסייע בלמידה ואינו מחליף את ההרצאות, התרגולים או חומרי הקורס הרשמיים.
ייתכנו בו טעויות או אי־דיוקים, ולכן אין להסתמך עליו כמקור יחיד.

הסיכום מכיל

הגדרות | משפטים | הוכחות | דוגמאות | מסקנות/הערות

מפת נושאים

01 פונקציה קדומה
הגדרה, סימון ואינטגרל לא מסוים

02 כללי חישוב
לינאריות, אינטגרציה בחלקים והצבה

03 דוגמאות הצבה וחלקים
חישובי אינטגרלים לא מסוימים

04 חלוקות וסכומים
חלוקה, סכום עליון וסכום תחתון

05 אינטגרביליות
אינטגרל עליון/תחתון וקריטריונים

חלק 1 - פונקציה קדומה

הגדרה, סימון ואינטגרל לא מסוים.

הגדרה - פונקציה קדומה

יהיו I קטע ו- $f : I \to \mathbb{R}$. נאמר ש- $F : I \to \mathbb{R}$ היא **פונקציה קדומה** של f ב- I אם F גזירה ב- I ומתקיים:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

הערה

אם F פונקציה קדומה של f ב- I , אז לכל $C \in \mathbb{R}$ גם $F + C$ פונקציה קדומה של f ב- I .

נסמן:

$$\int f(x)\, dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

דוגמה - דוגמאות

1. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
2. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
3. $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ עבור $\alpha \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

חלק 1 - פונקציה קדומה

הגדרה, סימון ואינטגרל לא מסוים.

משפט - 1

יהיו F, G פונקציות קדומות של f בקטע I. אז קיים $C \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים:

$$F(x) = G(x) + C$$

הוכחה - הוכחת משפט 1

נגדיר $h(x) = F(x) - G(x)$. אז:

$$h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

לכן h קבועה על I, כלומר קיים $C \in \mathbb{R}$ כך ש- $h(x) = C$. מכאן:

$$F(x) = G(x) + C$$

חלק 2 - כללי חישוב

לינאריות, אינטגרציה בחלקים והצבה.

משפט - 2

אם F פונקציה קדומה של f ו- G פונקציה קדומה של g בקטע I, אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

משפט - 3 - אינטגרציה בחלקים

יהיו u, v פונקציות גזירות. אז:

$$\int u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, dx$$

חלק 2 - כללי חישוב

לינאריות, אינטגרציה בחלקים והצבה.

הוכחה - הוכחת משפט 3

לפי כלל המכפלה:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

ולכן:

$$u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$$

מבצעים אינטגרציה ומקבלים:

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

משפט - 4 - הצבה

תהי g גזירה ותהי f רציפה. אם F קדומה של f , אז:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

כלומר כאשר $t = g(x)$ מתקיים $dt = g'(x)dx$.

חלק 3 - דוגמאות הצבה וחלקים

חישובי אינטגרלים לא מסוימים לפי כללי החישוב.

דוגמה - דוגמאות

1. $$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

2. $$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

3. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

דוגמה

באינטגרציה בחלקים עבור $\int xe^x\,dx$ נקבל:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

חלק 3 - דוגמאות הצבה וחלקים

חישובי אינטגרלים לא מסוימים לפי כללי החישוב.

דוגמה

עבור $\int x^2 e^x \, dx$ מבצעים אינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

דוגמה

עבור $\int \ln x \, dx$ נבחר $u = \ln x$ ו- $v' = 1$:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

חלק 3 - דוגמאות הצבה וחלקים

חישובי אינטגרלים לא מסוימים לפי כללי החישוב.

דוגמה - דוגמאות טריגונומטריות

1. $$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

2. $$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

3. $$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

4. $$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

חלק 4 - חלוקות וסכומים

חלוקה, סכום עליון וסכום תחתון.

הגדרה - חלוקה

יהיו $a < b$ ונביט בקטע $[a, b]$. **חלוקה** של $[a, b]$ היא קבוצה סופית של נקודות:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

כך ש:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

חלק 4 - חלוקות וסכומים

חלוקה, סכום עליון וסכום תחתון.

הגדרה - סכום עליון ותחתון

תהי f חסומה על $[a,b]$ ותהי P חלוקה. לכל $1 \leq k \leq n$ נגדיר:

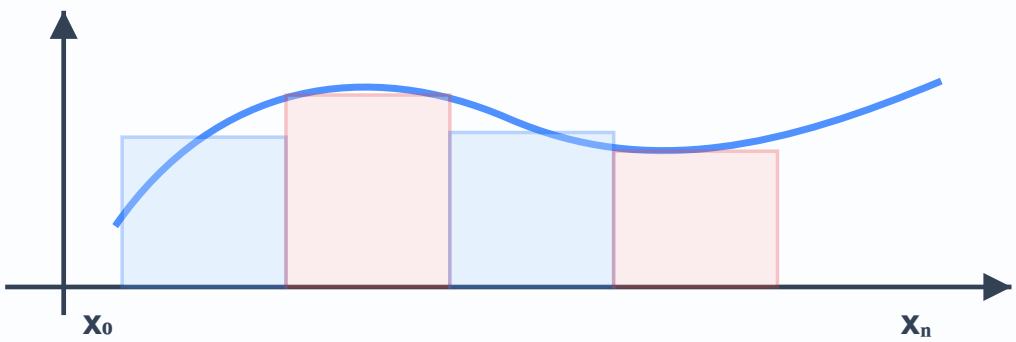
$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

הסכום העליון והסכום התחתון מוגדרים על ידי:

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$



חלק 4 - חלוקות וסכומים

חלוקה, סכום עליון וסכום תחתון.

הערה

לכל חלוקה P מתקיים:

$$s(f,P) \leq S(f,P)$$

משפט - 5

אם P ו- Q חלוקות של $[a,b]$ ו- $P \subseteq Q$, אז:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

חלק 5 - אינטגרביליות

אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון וקריטריון אינטגרביליות.

הגדרה - אינטגרל תחתון ועליון

תהי f חסומה על $[a,b]$. נגדיר:

$$\underline{I}(f) = \sup\{s(f,P) : P \text{ חלוקה של } [a,b]\}$$

$$\overline{I}(f) = \inf\{S(f,P) : P \text{ חלוקה של } [a,b]\}$$

הגדרה - אינטגרביליות

נאמר ש- f **אינטגרבילית** על $[a,b]$ אם:

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

במקרה זה הערך המשותף נקרא האינטגרל של f על $[a,b]$ ומסומן:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

חלק 5 - אינטגרביליות

אינטגרל עליון, אינטגרל תחתון וקריטריון אינטגרביליות.

משפט - 6

תהי f חסומה על $[a,b]$. אז f אינטגרבילית אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש:

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

הוכחה - הוכחת משפט 6

מההגדרות מתקיים תמיד $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך ש- $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$, אז הפער בין האינטגרל העליון והתחתון קטן מכל ε , ולכן הם שווים.

להפך, אם הם שווים, לפי הגדרת סופרימום ואינפימום אפשר לבחור חלוקה שבה הסכום העליון קרוב לערך המשותף והסכום התחתון קרוב אליו, ולכן ההפרש קטן מ- ε .